- Le but de ce problème est la détermination et l'étude des fonctions vérifiant les trois conditions du problème P suivant sur l'intervalle I =]0;+∞[.

$$\text{Problème P} : \begin{cases} \text{(i) } f \text{ est convexe} \\ \text{(ii) } \forall\, x \in I : f(x+1) - f(x) = \ln x \\ \text{(iii) } f(1) = 0 \end{cases}$$

- Dans la partie I, on exhibe une solution; dans la partie II, on étudie certaines propriétés des solutions ; dans la partie III, on montre qu'il y a unicité de la solution; dans la partie IV, on approche la solution par une suite de fonctions; enfin, dans la partie V, on procède à une étude plus précise d'une fonction intervenant dans la solution.

- Les candidats pourront utiliser le rappel suivant :
  Soit φ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I de R, alors :
  φ est continue sur I.
  φ est dérivable à gauche et à droite en tout point de I et :

$$\forall\, u, v \in I \text{ tels que } u < v, \quad \varphi'_g(u) \le \varphi'_d(u) \le \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{v - u} \le \varphi'_g(v) \le \varphi'_d(v)$$

- On note S_n la somme partielle de la série harmonique : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

PARTIE I

On note Γ la fonction définie sur I par la relation $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1) Etablir la convergence de l'intégrale Γ(x) pour tout x de I.

2)

a) Exprimer Γ(x+1) en fonction de Γ(x).

b) En déduire la valeur de Γ(n) pour n entier naturel non nul.

c) Montrer que la fonction G définie sur I par G(x) = ln (Γ(x)) vérifie les conditions (ii) et (iii) du problème P.

3)

a) Soient p et q deux réels strictement supérieurs à 1 tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que si x et y sont deux réels strictement positifs : $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

b) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle fermé, borné [a ; b] avec a<b.
Déduire de l'inégalité précédente, l'inégalité de Hölder :

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \le \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

c) Montrer en utilisant l'inégalité de Hölder, que G est solution du problème P.

PARTIE II

Dans toute cette partie, f est une fonction définie sur I, solution du problème P.

1)

a) Calculer f(n) pour $n \in N^*$.

b) Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$; en déduire que f est minorée sur tout intervalle]0 ; a] avec a > 0, puis calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Pour x > 0, on pose $\delta_f(x) = f'_d(x) - f'_g(x)$.

a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \delta_f(x) = 0$

indication : on pourra utiliser le rappel avec u et v prenant pour valeurs x-1; x; x+1.

b) Soient $n \in N$ et g_n la fonction définie sur I par $g_n(x) = f(x+n)$.
Montrer que $\delta_f = \delta_{g_n}$. En déduire que $\delta_f = 0$ puis que f est dérivable sur I.

3)

a) Soit $n \in N^*$, exprimer f '(n) en fonction de f '(1) et de S_{n-1}.

b) En déduire la limite de f '(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

4)

a) Montrer qu'il existe une valeur λ de] 1 ; 2 [en laquelle f ' s'annule et que c'est l'unique solution sur I de l'équation f '(x) = 0.

b) En déduire le sens de variation de f sur I puis le signe de f sur I.

PARTIE III

Dans cette partie, f et h sont deux solutions du problème P sur I. On pourra donc utiliser les résultats de la partie II. On pose u = f - h.

1) Montrer que :

a) u est dérivable et périodique.

b) u(1) = 0.

2) Déterminer une constante k telle que : $\forall n \in N^*, \forall x \in [n; n+1] \quad |u'(x) - u'(1)| \leq \frac{k}{n}$

3) Soit $x_0 \in]0 ; 1]$ et $x_n = x_0 + n$.

a) Montrer que la suite $(u'(x_n))_{n\in N^*}$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$. En déduire la valeur de $u'(x_0)$.

b) Déduire des questions précédentes que la fonction u est identiquement nulle. Conclure.

4) Donner les variations de la fonction Γ définie dans la partie I.

PARTIE IV

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ définie sur I par : $f_n(x) = \ln \dfrac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$

1)

a) Montrer que les fonctions f_n sont dérivables et convexes.

b) Etudier leurs limites aux bornes de I et la nature de leur branche infinie.

c) Montrer qu'il existe un minimum absolu pour chaque fonction f_n. On note α_n l'abscisse de ce minimum. En déduire les variations des fonctions f_n.

2)

a) Déterminer une fonction h, continue sur I, telle que $\forall x \in I \quad 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \dfrac{h(x)}{n^2}$

indication : on pourra utiliser le fait que $\forall u > 0, \quad 1 - \dfrac{1}{u} \leq \ln u \leq u - 1$.

b) En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge vers une fonction f sur I et que cette convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme]0 ; a] où a est un réel strictement positif.

3) Montrer de la même manière que la suite des dérivées $(f_n')_{n\geq 2}$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme]0 ; a]. En déduire l'expression de f '.

4) Pour tout $x \in I$ et tout entier $n \geq 2$, on pose : $g_n(x) = f_n(x+1) - f_n(x)$.

a) Montrer que pour tout x fixé dans I, la suite $(g_n(x))_{n\geq 2}$ converge vers ln x.

b) Montrer que f est l'unique solution du problème P.

PARTIE V

1) Calcul de $\Gamma(1/2)$.

Pour tout nombre réel $R \geq 0$, on pose :

$$I_R = \int_0^R e^{-t^2} dt, \quad J_R = \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \quad K_R = \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

où C_R et Q_R désignent respectivement le carré défini par $0 \leq x \leq R$, $0 \leq y \leq R$ et le quart de disque défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq R^2$.

a) Montrer que $J_R = I_R^2$ et que $K_R \leq J_R \leq K_{R\sqrt{2}}$.

b) Calculer K_R et la valeur de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

c) En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

2) Calculer $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n.

3) On rappelle que la suite $(S_n - \ln(n))_{n \in N^*}$ admet une limite notée γ lorsque n tend vers $+\infty$.

a) Montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

b) Montrer que $\forall n \geq 2, \quad \Gamma'(n) = u_n(S_{n-1} - \gamma)$ où u_n est un entier dépendant de n à déterminer.

4)

a) Montrer que $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = a(\gamma + 2\ln 2)$ où a est une constante à déterminer.

b) En déduire la valeur de $\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n.